

Tutorato Matematica Discreta

Capitolo 6

Alberto Paparella¹

15 Maggio 2025

¹Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli studi di Ferrara

Esercizio 1

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la seguente applicazione:

$$f(x, y, z) = (x - 2y + z, 3x + 2y + 11z, x + 3z, 2x - y + 5z).$$

- Verificare che f è lineare
- Scrivere la matrice A associata a f rispetto alle basi canoniche
- Trovare una base per $\text{Imm}(f)$ e la dimensione di $\text{Ker}(f)$
- Discutere l'appartenenza del vettore $(\alpha + 1, \alpha, \alpha, \alpha)$ all' $\text{Imm}(f)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

Esercizio 2

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$f(x, y, z) = (x + 3y + 4z, 2x + y + 3z, -x + 2y + z)$$

- Trovare la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3
- Calcolare la dimensione dell' $\text{Imm}(f)$
- Trovare una base per $\text{Ker}(f)$
- Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $(2, 3, h) \in \text{Imm}(f)$
- Dire se l'applicazione f è iniettiva, suriettiva e biettiva

Esercizio 3

Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- Si determinino le equazioni dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avente A quale matrice rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3
- Si determinino una base per $\text{Ker}(f)$ e la dimensione di $\text{Imm}(f)$
- Si verifichi se posti $\vec{v} = (2, 0, 4)$ e $\vec{w} = (-3, 1, 3)$ valga $\text{Imm}(f) = [\vec{v}, \vec{w}]$
- Si determini $\dim(\text{Imm}(F) \cap \text{Ker}(f))$

Esercizio 4

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

definita da
$$\begin{pmatrix} k+1 & -3 & k \\ 1 & -k & 2 \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione f **non** è iniettiva
- Per i valori di k trovati al punto precedente si determini una base per $\text{Ker}(f)$ e una per $\text{Imm}(f)$
- Si dimostri che $\mathbb{R}^3 = \text{Imm}(f) \oplus \text{Ker}(f)$

Esercizio 5

Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z, t) = (x + z, y, 2x + 2z - y, -3y + x + z)$$

- Si determinino una base e la dimensione di $\text{Ker}(f)$
- Si determinino una base e la dimensione di $\text{Imm}(f)$