Tutorato Matematica Discreta
Capitolo 3

Alberto Paparella[1]

20 - 27 Marzo 2025

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli studi di Ferrara

Esercizio 1

Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

- $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$
- $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z + 1 = 0\}$
- $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y, y = 2z\}$
- $W_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, y = 1\}$

Esercizio 2

Stabilire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:

- $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$
- $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 0\}$
- $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - y + 3z)^2 + (2x - y + z)^2 = 0\}$

Esercizio 3

Dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$, dire quali fra questi sono rispettivamente un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$, un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$, o una base di $\mathbb{R}^3$:

- $S_1 = \{(2, 1, 0), (\frac{1}{2}, 1, 1), (0, 1, 0)\}$
- $S_2 = \{(1, 3, 1), (1, 1, 1), (1, -1, 1)\}$
- $S_3 = \{(4, 1, 0), (0, 1, 1)\}$
- $S_4 = \{(1, 2, 2), (-1, 0, -1), (0, 0, 1), (2, 0, 0)\}$
- $S_5 = \{(0, 0, 1), (2, \frac{1}{2}, 0), (2, \frac{1}{2}, 1), (2, \frac{1}{2}, 2)\}$

Esercizio 4

Sia $W = \{(x - y + z, 2x + y - 4z, x - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

- trovare una base e la dimensione di W
- verificare che $(2, -5, -1) \in W$ e trovare le coordinate del vettore rispetto alla base trovata nel punto precedente

Esercizio 5

Siano dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

- $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0, x - y = 0\}$
- $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\}$

Determinare:

- una base per W_1 e W_2
- $W_1 + W_2$
- se $W_1 + W_2$ è somma diretta

Esercizio 6

In $\mathbb{R}^4$ siano dati i seguenti vettori $\vec{a} = (1, -1, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{c} = (2, -1, 1, 2)$ e sia $W = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ il sottospazio generato da $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

- trovare una base e la dimensione di W
- verificare che $\vec{d} = (1, 1, 2, 1) \in W$ e trovare le sue coordinate rispetto alla base individuata al punto precedente

Esercizio 7

Dati i seguenti sottoinsiemi $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x = y\}$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z = 0\}$ si chiede di:

- verificare che sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$ e per ciascuno di essi determinarne la base e la dimensione
- determinare $V + W$
- stabilire se $V + W$ è somma diretta

Esercizio 8

Sia
$W = \{(x_2 - \frac{x_3}{2} + \frac{x_1}{5}, 0, \frac{x_3}{2} + x_1 + 2x_2, \frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{4} + x_2) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \sqsubseteq \mathbb{R}^4$:

- trovare la dimensione e una base di W
- dato $V = \{(x_2, x_1, 2x_2, x_1 + x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ trovare $V + W$
- stabilire se $V + W$ è somma diretta